Discrete Mathematics 38 (1982) 243–263
North-Holland Publishing Company

SOUS-GRAPHES TRAÇABLES DES GRAPHES INFINIS

Norbert POLAT

Département de mathématiques, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. "A", Montréal, Québec, H37 3J7 Canada

Received 20 September 1979
Revised 3 March 1981

In this paper the traceable classes of an infinite graph are defined and studied. They are the classes of 1-traceable subgraphs (i.e. those subgraphs the edges of which can be arranged in an infinite sequence $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ such that $e_n \neq e_p$ if $n \neq p$, and e_n, e_{n+1} are adjacent) of the given graph which cannot be separated by the deletion of any finite set of edges. It is shown that these classes are closely related to some well-defined terminal classes (=ends) of the line-graph of the graph. Several properties of traceable classes are studied, in particular it is shown that the free classes can be distinguished as odd or even. These concepts are then used to give new solutions to two problems of Ore.

Introduction

Dans [3] Halin introduit le concept de *classes terminales* (Ende) d'un graphe infini X, ce sont les classes de rayons (chaînes simplement infinies) de X qui ne peuvent être séparés par la suppression d'un nombre fini de sommets de X. Le but de cet article est de définir la notion duale obtenue en considérant la séparation non plus par les sommets mais par les arêtes, et d'en donner ensuite des applications.

Séparer les parties d'un graphe à l'aide uniquement des arêtes implique que deux sous-graphes doivent être considérés comme disjoints simplement s'ils n'ont aucune arête commune. Aussi aux notions de chaîne, de rayon et de circuit infini (chaîne doublement infinie) seront substituées les notions de graphe que l'on dira 0 (resp. 1, 2)-*traçable* selon qu'il existe un épimorphisme fort (i.e. induisant une bijection entre les ensembles d'arêtes) d'une chaîne (resp. d'un rayon, d'un circuit infini) sur ce graphe.

Nous définirons alors les *classes traçables* d'un graphe infini X, comme les classes des sous-graphes 1-traçables de X qui ne sont pas séparés par la suppression d'un ensemble fini quelconque d'arêtes de X. Certaines propriétés de ces classes sont alors étudiées. Nous montrons en particulier qu'il existe une application de l'ensemble des classes terminales d'un graphe dans celui de ses classes traçables, qui est bijective lorsque le graphe est localement fini. De plus certains ensembles de classes traçables, et en particulier certaines classes traçable dites "libres", pourront être considérés d'une certaine façon comme *pairs* ou *impairs* suivant que les ensembles finis minimaux d'arêtes qui les "isolent" ont tous une cardinalité respectivement paire ou impaire.

Utilisant certaines propriétés analogues des classes terminales des graphes localement finis, Zelinka [10, 11] résoud partiellement un problème posé par Ore [6, p. 47], qui était de caractériser les graphes infinis sans sommet de degré impair recouvrables par k et par pas moins de k sous-graphes 2-traçables. Ne semblant pas savoir que Nash-Williams [5] avait déjà résolu entièrement ce problème, Zelinka donne de celui-ci une solution fort belle et fort claire pour le cas particulier des graphes localement finis.

Nous montrerons que ce genre de solution s'étend alors fort bien dans le cas général, en utilisant les classes traçables en lieu et place des classes terminales. Nous généraliserons aussi ce type de solution pour résoudre le deuxième problème de Ore, qui était de caractériser les graphes infinis recouvrables par k et par pas moins de k sous-graphes traçables, ce qui avait déjà été fait par Rothschild [8] à l'aide de méthodes tout à fait analogues à celles de Nash-Williams.

Nous remercions le professeur G. Sabidussi de ses remarques pertinentes et en particulier de nous avoir suggéré d'utiliser la notion de graphe dérivé, ce concept s'insère en effet naturellement dans une telle étude. En fait cette dernière aurait pu être faite en travaillant uniquement avec les classes terminales des graphes dérivés. Mais cet ensemble nous a paru trop riche, c'est pourquoi nous avons défini les classes traçables d'un graphe dont l'ensemble peut être considéré, à une bijection près, comme une partie de l'ensemble des classes terminales de sa dérivée, avec l'égalité dans certains cas particuliers qui ont été complètement caractérisés. Malheureusement il ne semble pas que les preuves des résultats obtenus dans les Sections 3 et 4 auraient gagné en clarté et en simplicité avec l'emploi des graphes dérivés, c'est pourquoi nous avons limité celui-ci aux deux premières sections.

0. Notation et terminologie

0.1. Pour un ensemble X nous noterons $|X|$ la cardinalité de X, et $\mathfrak{P}(X)$ (resp. $\mathfrak{P}_\omega(X)$) l'ensemble des parties (resp. des parties finies) de X.

0.2. Les graphes que nous considèrerons sont non orientés et sans boucle. Pour un graphe X nous noterons $V(X)$ l'ensemble de ses sommets, et $E(X)$ celui de ses arêtes. Une *arête* e de X est une paire non ordonnée d'éléments distincts de $V(X)$ appelés les *extrémités* de e. L'arête d'extrémités x et y sera notée $[x, y]$. De plus le graphe réduit au seul sommet x (resp. à la seule arête e) sera noté (x) (resp. (e)).

Pour $x \in V(X)$, nous poserons

$$V(x; X) = \{y \in V(X) : [x, y] \in E(X)\}$$

et

$$E(x; X) = \{[x, y] \in E(X) : y \in V(x; X)\};$$

de plus $\mathscr{C}_X(x)$ désignera la composante de X contenant x. $|V(x; X)|$ est applelé le *degré* de x dans X, et est noté $d(x; X)$. Un graphe X est *localement fini* si $d(x; X)$ est fini pour tout $x \in V(X)$. Si n est un cardinal, X est *n-régulier* si $d(x; X) = n$ pour tout $x \in V(X)$. Un graphe non vide connexe et 2-régulier est appelé un *circuit*. Un circuit fini est encore appelé un *cycle*.

Y est un *sous-graphe* de X, symboliquement $Y \subseteq X$, ssi $V(Y) \subseteq V(X)$ et $E(Y) \subseteq E(X)$, et c'est un *facteur* de X dans le cas particulier où $V(Y) = V(X)$; c'est une *restriction* de X ssi c'est un sous-graphe tel que $x, y \in V(Y)$ et $[x, y] \in E(X)$ impliquent $[x, y] \in E(Y)$. Pour $S \subseteq V(X)$ nous noterons $X | S$ la restriction de X à l'ensemble S. Si S est un ensemble quelconque nous poserons $X - S = X | V(X) - S$, et pour un graphe Y, $X - Y$ désignera le graphe $X - V(Y)$. Dualement si A est un ensemble d'arêtes, $X \setminus A$ sera le plus petit sous-graphe de X avec $E(X \setminus A) = E(X) - A$, et pour un graphe Y, $X \setminus Y$ désignera $X \setminus E(Y)$. Une arête e de X est un *isthme* si X est connexe alors que $X \setminus e$ ne l'est pas.

La *réunion* d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ de graphes est le graphe, noté $\bigcup_{i \in I} X_i$, tel que

$$V\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) = \bigcup_{i \in I} V(X_i) \quad \text{et} \quad E\Big(\bigcup_{i \in I} X_i\Big) = \bigcup_{i \in I} E(X_i).$$

L'*intersection* $\bigcap_{i \in I} X_i$ est définie d'une façon analogue. De plus si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-graphes d'un graphe X, la restriction de X à $\bigcup_{i \in I} V(X_i)$ est appelée le *joint* de la famille $(X_i)_{i \in I}$, et est notée $\bigvee_{i \in I} X_i$.

Une *chaîne* $W = (x_0, \ldots, x_n)$ est un graphe avec $V(W) = \{x_0, \ldots, x_n\}$ ($x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$) et $E(W) = \{[x_i, x_{i+1}] : 0 \leq i < n\}$. Un *rayon* $R = (x_0, x_1, \ldots)$ est un graphe avec $V(R) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ($x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$) et $E(R) = \{[x_n, x_{n+1}] : n \in \mathbb{N}\}$. D'après ce qui précède un *circuit infini* $C = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)$ est un graphe avec $V(C) = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ($x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$) et $E(C) = \{[x_n, x_{n+1}] : n \in \mathbb{Z}\}$, qui pourra donc toujours être considéré comme la réunion de deux rayons.

Etant donné deux sommets x et y d'un graphe X, nous appellerons *xy-chaîne* de X toute chaîne de X d'extrémités x et y. Si $x = y$, une telle chaîne sera donc réduite au seul sommet x. Plus généralement, si $A, B \subseteq V(X)$, une *AB-chaîne* de X sera toute xy-chaîne de X avec $x \in A$ et $y \in B$ et dont seules les extrémités appartiennent à $A \cup B$. En particulier tout élément de $A \cap B$ sera donc une AB-chaîne.

0.3. Etant donné un graphe X, son graphe *dérivé* (*adjoint* dans la terminologie de Berge [1]) est le graphe noté ∂X tel que:

$$V(\partial X) = E(X)$$

et $E(\partial X) = \{[e, e'] : e$ et e' sont des arêtes adjacentes de $X\}$.

On pose $\partial^0 X = X$ et $\partial^n X = (\partial^{n-1} X)$ pour $n \geq 1$.

0.4. Etant donné deux graphes X et Y, un *homomorphisme* $\varphi: X \to Y$ est une fonction de $V(X)$ dans $V(Y)$ telle que $[x, y] \in E(X)$ implique $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$. A tout homomorphisme φ est associée la fonction $\varphi^{\#}: E(X) \to E(Y)$ telle que $\varphi^{\#}[x, y] = [\varphi x, \varphi y]$ pour tout $[x, y] \in E(X)$. Un homomorphisme φ est dit *fort* si $\varphi^{\#}$ est injective; et c'est un *épimorphisme* si φ et $\varphi^{\#}$ sont surjectives.

On dira qu'un graphe X est 0-*traçable* (resp. 1-*traçable*, 2-*traçable*) ssi il existe un épimorphisme fort d'une chaîne (resp. d'un rayon, d'un circuit infini) sur X. Plus généralement X est *traçable* s'il est i-traçable pour un i quelconque appartenant à $\{0, 1, 2\}$.

0.5. Etant donné un graphe X, un *recouvrement* de X est une famille $\mathscr{A}$ de sous-graphes de X vérifiant les deux conditions suivantes:

(i) $\bigcup \mathscr{A} = X$;

(ii) $E(A) \cap E(B) = \emptyset$ pour $A, B \in \mathscr{A}$ avec $A \neq B$ (i.e. A et B sont *arête-disjoints*).

Un recouvrement $\mathscr{A}$ d'un graphe X sera dit i-*traçable* pour $i = 0, 1, 2$ (resp. *traçable*) ssi chaque membre de $\mathscr{A}$ est i-traçable (resp. traçable).

0.6. Rappelons pour terminer le concept de *classe terminale* introduit par Halin [3, p. 127]. Si $S \in \mathfrak{P}_\omega(V(X))$ et si R est un rayon de X, $\mathscr{C}_{X-S}(R)$ désignera l'unique composante de $X - S$ contenant un sous-rayon de R. Si R_1 et R_2 sont deux rayons de X, nous poserons $R_1 \sim_X R_2$ ssi $\mathscr{C}_{X-S}(R_1) = \mathscr{C}_{X-S}(R_2)$, pout tout $S \in \mathfrak{P}_\omega(V(X))$. Cette relation est une équivalence sur l'ensemble des rayons de X, dont les classes sont appelées *classes terminales* de X (Halin utilise le mot "Ende"). Nous noterons $\mathcal{T}(X)$ l'ensemble de ces classes, et $[R]_X$ la classe de R, où R est un rayon de X. Pour $\tau \in \mathcal{T}(X)$ et $S \in \mathfrak{P}_\omega(V(X))$, nous définirons $\mathscr{C}_{X-S}(\tau)$ en posant $\mathscr{C}_{X-S}(\tau) = \mathscr{C}_{X-S}(R)$ pour un $R \in \tau$ quelconque. Une classe terminale τ est dite *libre* ssi il existe $S \in \mathfrak{P}_\omega(V(X))$ tel que $\mathscr{C}_{X-S}(\tau) \neq \mathscr{C}_{X-S}(\tau')$ pour toute classe terminale τ' différente de τ. Dans le cas contraire τ est dite *liée*.

1. Classes traçables

Comme nous allons utiliser les graphes dérivés, nous allons commencer par rappeler deux résultats bien connus et évidents.

1.1. *Si Y est un sous-graphe d'un graphe X, alors ∂Y est une restriction de ∂X.*

1.2. *Soit n un entier > 3. Un graphe X est isomorphe au graphe biparti-complet $K_{1,n}$ ssi ∂X est isomorphe au graphe complet K_n.*

1.3. Proposition. *Un graphe R est un rayon ssi ∂R est un rayon.*

Démonstration. (a) Soit $R = (x_0, x_1, \ldots)$ un rayon. Posons $e_n = [x_n, x_{n+1}]$ pour tout $n < \omega$. Alors $(e_0, e_1, \ldots)$ est évidemment un rayon et un facteur de ∂R. De plus puisque on a $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ alors, pour tout couple (n, p) d'entiers, on a $[e_n, e_{n+p}] \in E(\partial R)$ ssi $p = 1$, ce qui prouve bien que $(e_0, e_1, \ldots)$ est une restriction de ∂R, et par suite est égal à ∂R.

(b) Réciproquement soit R un graphe tel que $\partial R = (e_0, e_1, \ldots)$ soit un rayon. Pour tout $n < \omega$ notons V_n l'ensemble des extrémités dans R de l'arête e_n. On a alors $|V_n \cap V_{n+1}| = 1$ et $V_n \cap V_{n+p} = \emptyset$ quel que soit $p > 1$, puisque ∂R est un rayon. Posons, pour tout $n < \omega$, $V_n \cap V_{n+1} = \{x_{n+1}\}$ et $V_0 - V_1 = \{x_0\}$. Il est alors clair que $(x_0, x_1, \ldots)$ est un rayon qui est égal à R. □

1.4. Proposition. *Si X est un graphe 1-traçable, alors ∂X possède un rayon R comme facteur tel que $\partial X \mid V(R')$ ne soit pas complet quel que soit le sous-rayon R' de R.*

Démonstration. Soit φ un épimorphisme fort du rayon $(0, 1, \ldots)$ sur X. Alors

$$R = (\varphi^{\#}[0, 1], \varphi^{\#}[1, 2], \ldots)$$

est bien un rayon et un facteur de ∂X. D'autre part s'il existe n tel que

$$\partial X \mid \{\varphi^{\#}[n, n+1], \varphi^{\#}[n+1, n+2], \ldots\}$$

soit complet alors, d'après 1.2, $\varphi(n, n+1, \ldots)$ doit être isomorphe à $K_{1,\aleph_0}$, mais ceci est impossible puisque φ est fort. D'où le résultat. □

1.5. Remarque. La réciproque de la proposition précédente est manifestement fausse. En effet considérons le graphe X formé du rayon $(0, 1, \ldots)$ et d'un sommet a adjacent à tous les sommets du rayon. Ce graphe n'est pas 1-traçable, et pourtant le graphe

$$([0, a], [0, 1], [1, a], [1, 2], [2, a], [2, 3], \ldots)$$

"obtenu en alternant les arêtes du rayon avec les arêtes incidentes à a" est un rayon et un facteur de ∂X tel que la restriction de ∂X à tout sous-rayon ne soit pas complète.

Nous allons maintenant prouver un lemme qui nous sera utile un peu plus tard, et qui est relatif aux rayons des graphes dérivés.

1.6. Lemme. *Soit X un graphe. Pour tout rayon $(e_0, e_1, \ldots)$ de ∂X il existe un homomorphisme φ du rayon $(0, 1, \ldots)$ dans X, et une surjection croissante $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tels que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

(i) $\varphi^{\#}[n, n+1] \neq \varphi^{\#}[n+p, n+p+1]$ *pour tout entier* $p > 1$;

(ii) $\varphi^{\#}[n, n+1] = e_{fn}$.

Si de plus, quel que soit le sous-rayon R de $(e_0, e_1, \ldots)$, le graphe $\partial X \mid V(R)$ n'est pas complet, alors il existe une application strictement croissante $g:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi \circ g$ soit un homomorphisme fort de $(0, 1, \ldots)$ dans X avec

$$E(\operatorname{im} \varphi \setminus \operatorname{im} \varphi \circ g) = \{e \in E(\operatorname{im} \varphi) : |\varphi^{\#-1} e| = 2\}.$$

Démonstration. (a) Notons V_n l'ensemble des extrémités de e_n, pour tout entier n.

On définit alors $\varphi 0$ et $\varphi 1$ de manière que $V_0 = \{\varphi 0, \varphi 1\}$, et on pose $f0 = 0$. Supposons φn, $\varphi(n+1)$ et fn définis pour un $n \geq 0$, de façon que $[\varphi n, \varphi(n+1)] = e_{fn}$.

Si $\varphi(n+1) \in V_{n+2}$ alors on définit $\varphi(n+2)$ comme l'unique élément de $V_{n+2} - \{\varphi(n+1)\}$, et on pose $f(n+1) = fn + 1$.

Sinon on a $\varphi n \in V_{n+2}$, on pose alors $\varphi(n+2) = \varphi n$ et $f(n+1) = fn$.

Il est clair que les deux fonctions ainsi définies vérifient les conditions (i) et (ii).

(b) Prouvons maintenant la deuxième partie du lemme et construisons la fonction g de la manière suivante.

Posons $g0 = 0$ et supposons gn défini pour un entier $n \geq 0$. Alors, puisque

$$\partial X \mid \{e_{fgn}, e_{fgn+1}, \ldots\}$$

n'est pas complet, il existe un entier $p \geq fgn$ tel que $|\varphi^{\#-1} e_p| = 1$. Considérons le plus petit de ces entiers p, et définissons $g(n+1)$ comme le plus petit entier tel que $fg(n+1) = p + 1$.

On voit alors assez aisément qu'en raison des conditions (i) et (ii), g est la fonction cherchée. □

1.7. Proposition. *Soit Y un sous-graphe 1-traçable d'un graphe X. Alors pour tout ensemble fini A d'arêtes de X il existe une unique composante de $X \setminus A$ contenant un sous-graphe 1-traçable de Y. On la notera $\mathscr{C}_{X \setminus A}(Y)$.*

Démonstration. Soit $\varphi: R \to X$ un épimorphisme fort d'un rayon $R = (x_0, x_1, \ldots)$ sur Y. L'ensemble A étant fini, et φ étant fort, il existe un entier n tel que, si $R_n = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$ est le sous-rayon de R d'origine x_n, alors $A \cap \varphi E(R_n) = \emptyset$. Par suite φR_n est un sous-graphe 1-traçable de $Y \setminus A$, et $Y \setminus \varphi R_n$ est fini, ce qui suffit pour prouver le résultat. □

Remarquons que $\mathscr{C}_{X \setminus A}(Y)$ est la composante de $X \setminus A$ contenant l'unique composante infinie de $Y \setminus A$.

1.8. Si Y_0 et Y_1 sont deux sous-graphes 1-traçables de X, nous poserons

$$Y_0 \equiv_X Y_1 \quad \text{ssi} \quad \mathscr{C}_{X \setminus A}(Y_0) = \mathscr{C}_{X \setminus A}(Y_1) \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{P}_\omega(E(X)).$$

Cette relation est évidemment une équivalence sur l'ensemble des sous-graphes 1-traçables de X, dont les classes seront appelées *classes traçables* de X. Nous noterons $\mathscr{E}(X)$ l'ensemble de ces classes, et $[\![Y]\!]_X$ la classe de Y pour un sous-graphe 1-traçable Y de X.

Le résultat qui va suivre est analogue à une propriété bien connue des rayons et de la relation $\sim_X$. Il fait appel à une notion duale de celle de AB-chaînes où A et B sont des ensembles de sommets, que nous allons tout d'abord définir.

1.9. Définition. Soit E_0 et E_1 deux ensembles d'arêtes d'un graphe X. On appellera *E_0E_1-chaîne* de X toute chaîne $W=(x_0,\ldots,x_n)$ de X avec $n\geq 1$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

(i) $\{[x_0,x_1],[x_{n-1},x_n]\}\subseteq E_0\cup E_1$;

(ii) $|E(W)\cap E_i|=1$ pour $i=0,1$.

1.10. Lemme. *Soit X un graphe, et soit E_0 et E_1 deux parties de $E(X)$. Pour toute E_0E_1-chaîne U de ∂X, il existe une E_0E_1-chaîne unique W de X telle que $E(W)\subseteq V(U)$.*

Démonstration. Notons e_0 et e_1 les extrémités de U, et soit Y le sous-graphe de X tel que $E(Y)\subseteq V(U)$. Puisque U est une E_0E_1-chaîne, Y est un arbre tel que $E(Y)\cap(E_0\cup E_1)=\{e_0,e_1\}$. Pour $i=0,1$ notons x_i une extrémité quelconque de l'arête e_i. Alors, si W est l'unique x_0x_1-chaîne de Y, $W\cup(e_0)\bigcup(e_1)$ est la chaîne cherchée. □

1.11. Théorème. *Soit Y_0 et Y_1 deux sous-graphes 1-traçables d'un graphe X. Les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $Y_0\equiv_X Y_1$;

(ii) $R_0\sim_{\partial X}R_1$ *où, pour $i=0,1$, R_i est un rayon quelconque de ∂Y_i;*

(iii) *Il existe un sous-graphe 1-traçable Y de X tel que l'on ait $|E(Y\bigcap Y_i)|=\aleph_0$ pour $i=0,1$;*

(iv) *Il existe un ensemble infini de $(E(Y_0),E(Y_1))$-chaînes de X deux à deux arête-disjointes.*

Démonstration. Pour $i=0,1$ il existe un épimorphisme fort φ_i du rayon $(0,1,\ldots)$ sur Y_i. Posons

$$R_i^*=(\varphi_i^\#[0,1],\varphi_i^\#[1,2],\ldots),$$

c'est un rayon et un facteur de ∂Y_i.

(i)$\Leftrightarrow$(ii). Pour $i=0,1$ on a $V(R_i)\subseteq V(R_i^*)$, donc $R_i\sim_{\partial X}R_i^*$, et par suite:

$$\begin{aligned}Y_0\equiv_X Y_1 &\Leftrightarrow \mathscr{C}_{X\setminus A}(Y_0)=\mathscr{C}_{X\setminus A}(Y_1)\quad\text{pour tout}\quad A\in\mathfrak{P}_\omega(E(X))\\ &\Leftrightarrow \mathscr{C}_{X-A}(R_0^*)=\mathscr{C}_{X-A}(R_1^*)\quad\text{pour tout}\quad A\in\mathfrak{P}_\omega(V(X))\\ &\Leftrightarrow R_0^*\sim_{\partial X}R_1^*\\ &\Leftrightarrow R_0\sim_X R_1.\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(iii). Puisque $R_0^* \sim_{\partial X} R_1^*$ il existe un ensemble infini Δ de $(V(R_0^*)-V(R_1^*))$-chaînes de ∂X deux à deux disjointes. On pourra alors toujours trouver une famille infinie $(W_n)_{n<\omega}$ d'éléments de Δ telle que, pour $i=0,1$, si $\varphi_i^\#[s_n^i, s_n^i+1]$ est l'extrémité de W_n dans $V(R_i^*)$, alors on ait $s_n^i < s_{n+1}^i$ et $\partial X \mid V(R^{2n+i})$ ne soit pas complet où R^{2n+i} est la sous-chaîne $(\varphi_i^\#[s_{2n+i}^i, s_{2n+i}^i+1], \ldots, \varphi_i^\#[s_{2n+i+1}^i, s_{2n+i+1}^i+1])$ de R_i^*. Alors

$$R = \bigcup_{\substack{n\geq 0\\ i=0,1}} R^{2n+i} \cup W_{2n+i}$$

est un rayon de ∂X tel que $|R\cap R_i^*| = \aleph_0$ pour $i=0,1$, et tel que $\partial X \mid V(R')$ ne soit pas complet pour tout sous-rayon R' de R.

Finalement, d'après le Lemme 1.6 et en raison du choix des s_n^i, il existe un homomorphisme fort φ du rayon $(0,1,\ldots)$ dans X tel que l'on ait $\varphi^{\#-1}V(R^{2n+i}) \neq \emptyset$ pour tout $n\geq 0$ et $i=0,1$. Ce qui prouve le résultat.

(ii)$\Rightarrow$(iv) Soit Δ un ensemble infini de $(V(R_0^*), V(R_1^*))$-chaînes de ∂X deux à deux disjointes. Pour chaque $U\in\Delta$ notons W_U l'unique $(E(Y_0), E(Y_1))$-chaîne de X telle que $E(W_U)\subseteq V(U)$ (cf. 1.10). Alors il est clair que la famille $(W_U)_{U\in\Delta}$ répond à la condition (iv).

(iii)$\Rightarrow$(i) et (iv)$\Rightarrow$(i) sont évitentes. □

1.12. D'après ce qui précède nous pouvons définir une injection ρ_X de $\mathscr{E}(X)$ dans $\mathscr{T}(\partial X)$ en posant, pour tout sous-graphe 1-traçable Y de X, $\rho_X([\![Y]\!]_X) = [R]_{\partial X}$ où R est un rayon quelconque de Y. Cette injection n'est évidemment pas surjective dans le cas général, comme le montre l'exemple du graphe $K_{1,\aleph_0}$. Comme conséquence directe de 1.4 et de 1.6 nous obtenons:

1.13. Théorème. *Soit X un graphe et soit $\tau\in\mathscr{T}(\partial X)$. Alors $\tau\in \operatorname{im}\rho_X$ ssi il existe un rayon $R\in\tau$ tel que $\partial X \mid V(R')$ ne soit pas complet quel que soit le sous-rayon R' de R.*

1.14. Proposition. *Soit R_0 et R_1 deux rayons d'un graphe X. Alors $R_0 \sim_X R_1$ implique $R_0 \equiv_X R_1$.*

Démonstration. En effet, s'il existe un ensemble fini A d'arêtes de X tel que $\mathscr{C}_{X\setminus A}(R_0) \neq \mathscr{C}_{X\setminus A}(R_1)$ alors, si S est l'ensemble des extrémités des arêtes appartenant à A, c'est un ensemble fini, et on a $\mathscr{C}_{X-S}(R_0)\neq\mathscr{C}_{X-S}(R_1)$. D'où le résultat. □

La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple suivant. Soit X le graphe formé d'un circuit infini C et d'un sommet $x\notin V(C)$ adjacent à tout sommet de C. Si R_0 et R_1 sont deux rayons de X tels que $C=R_0\cup R_1$, alors on a bien $R_0\equiv_X R_1$ mais par contre R_0 et R_1 n'appartiennent pas à la même classe terminale de X.

1.15. On notera γ_X l'application de $\mathcal{T}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$ telle que l'on ait $\gamma_X[R]_X = [\![R]\!]_X$ pour tout rayon R de X, i.e. l'image par γ_X d'une classe terminale τ de X est l'unique classe traçable de X qui la contient. En général cette application n'est ni injective ni surjective. Pour la non-injectivité, il suffit de considérer l'exemple précédent. Quant à la surjectivité, le graphe biparti-complet $K_{2,\aleph_0}$ en est le contre-exemple le plus simple. C'est en effet un graphe 2-traçable sans rayon; on a $\mathcal{T}(K_{2,\aleph_0}) = \emptyset$ et $|\mathcal{E}(K_{2,\aleph_0})| = 1$.

Nous allons étudier maintenant dans quelles conditions les application ρ_X et γ_X précédentes sont surjectives ou bijectives. Rappelons que ρ_X est déjà une injection.

1.16. Théorème. *Soit X un graphe. L'application ρ_X est une bijection si, pour tout sommet x de X, l'ensemble des isthmes incidents à x n'est pas une partie cofinie de $E(x; X)$.*

Démonstration. (a) *Nécessité.* Supposons qu'il existe un sommet x tel que l'ensemble des isthmes incidents à x soit une partie cofinie A de $E(x; X)$. Alors il est clair que pour tout sous-graphe 1-traçable Y de X, il existe un ensemble fini B d'arêtes de X tel que $A \cap E(\mathscr{C}_{X\setminus B}(Y)) = \emptyset$. Par suite pour tout rayon R du sous-graphe complet $\partial X \mid A$ de ∂X, on a $[R]_{\partial X} \notin \operatorname{im} \rho_X$, ce qui prouve que ρ_X n'est pas surjectif.

(b) *Suffisance.* Il suffit évidemment de prouver que ρ_X est surjectif.

Soit Y un sous-graphe complet infini de ∂X. Soit Z le sous-graphe de X tel que $E(Z) = V(Y)$. Puisque Y est complet et de cardinalité $\alpha \geqslant \aleph_0$, alors Z est isomorphe à $K_{1,\alpha}$. Soit x l'extrémité commune de toutes les arêtes de Z. En raison de l'hypothèse du théorème, et puisque $d(x; X) \geqslant \aleph_0$, il existe un ensemble infini A d'arêtes de X indicentes à x qui ne sont pas des isthmes. On a deux cas à considérer.

(b.1) Il existe un rayon R de X tel que $x \in V(\mathscr{C}_{X-S}(R))$ pour tout $S \in \mathfrak{P}_\omega(V(X-x))$. Alors on a $E(Z \cap \mathscr{C}_{X\setminus B}(R)) \subseteq B$ pour toute partie finie B de $E(X)$, ce qui implique que $\rho_X[\![R]\!]_X = [R']_{\partial X}$ pour tout rayon R' de Y.

(b.2) Il n'existe aucun rayon vérifiant l'hypothèse de (b.1). On a alors deux sous-cas à considérer.

(b.2.1) Il existe un ensemble fini dénombrable Γ de composantes de $X - x$ contenant des sommets incidents à des arêtes appartenant à A. Pour tout $G \in \Gamma$ posons $G_x = X \mid V(G \cup (x))$. On a $|A \cap E(G_x)| > 1$, par suite il existe un cycle C_G de G_x contenant x. Le graphe $\partial(\bigcup_{G\in\Gamma} C_G)$ est alors une restriction infinie dénombrable de ∂X, qui n'est pas complète puisqu'on a $(C_G - x) \cap (C_{G'} - x) = \emptyset$ si $G \neq G'$, et qui possède évidemment un rayon R comme facteur. Alors, comme on a $A \subseteq V(R)$ et $|A| = \aleph_0$, il est clair que $[R]_{\partial X} = [R']_{\partial X}$ pour tout rayon R' de Y.

(b.2.2) Si l'ensemble des composantes de $X - x$ contenant des sommets incidents à des arêtes appartenant à A est fini, c'est que l'une de ces composantes G

possède un ensemble infini P de ces sommets. Posons comme précédemment $G_x = X \mid V(X \cup (x))$. D'après les résultats (3.21) et (3.11) de [7] il existe un ensemble fini S de sommets de G tel que $X - S \cup \{x\}$ ait un ensemble infini Γ de composantes contenant des éléments de P. L'ensemble Γ étant infini et S étant fini, celui-ci possède donc un élément y tel qu'il existe un ensemble infini de yP-chaînes de G n'ayant deux à deux que le sommet y commun. Par conséquent il existe un ensemble infini dénombrable Δ de xy-chaînes de G_x n'ayant deux à deux que leurs extrémités x et y communes. Alors, tout comme en (b.2.1), le graphe $\partial(\bigcup \Delta)$ est une restriction infinie dénombrable de ∂X qui n'est pas complète, et qui possède évidemment un rayon R comme facteur. La conclusion est la même qu'en (b.2.1).

Le fait que ρ_X soit surjective est alors une conséquence de 1.4 et de 1.13. □

1.17. Théorème. *Soit X un graphe tel que $X - S$ ait un nombre fini de composantes pour toute partie finie S de $V(X)$. Alors les applications γ_X et ρ_X sont surjectives.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de 1.16 pour ρ_X. Quant à γ_X il faut montrer que toute classe traçable de X contient un rayon. Soit Y un sous-graphe 1-traçable de X. Construisons par récurrence les suites $(x_n)_{n<\omega}$ et $(Z_n)_{N<\omega}$.

Posons $Z_0 = X$ et soit x_0 un sommet quelconque de X. Supposons que pour un entier n les suites $(x_i)_{i\leqslant n}$ et $(Z_i)_{i\leqslant n}$ soient définies de manière que $(x_0, \ldots, x_n)$ soit une chaîne de X et, dans le cas où $n > 0$, Z_n soit une composante de $X - (x_0, \ldots, x_{n-1})$ contenant x_n et telle que $Z_n \cap Y$ soit infini. Alors en raison de l'hypothèse du théorème il existe une composante Z_{n+1} de $Z_n - x_n$ telle que $Z_{n+1} \cap Y$ soit infini. Comme Z_n est connexe et $x_n \in V(Z_n)$ il existe des sommets de Z_{n+1} adjacents à x_n; notons x_{n+1} l'un d'eux.

Alors $R = (x_0, x_1, \ldots)$ est un rayon de X tel que $Y \cap \mathscr{C}_{X-S}(R)$ soit infini pour tout ensemble fini S de sommets de X. Cela implique donc a fortiori que, pour tout $A \in \mathfrak{P}_\omega(E(X))$, on a $\mathscr{C}_{X\setminus A}(R) = \mathscr{C}_{X\setminus A}(Y)$, i.e. $R \equiv_X Y$. □

1.18. Corollaire. *Soit X un graphe quelconque. Alors les applications $\gamma_{\partial X}$ et $\rho_{\partial X}$ sont surjectives.*

C'est une conséquence immédiate de 1.17 et du lemme suivant.

1.19. Lemme. *Soit X un graphe connexe et soit A une partie finie de $E(X)$. Alors l'ensemble des composantes de $X \setminus A$ et celui de $\partial X - A$ sont finis.*

Démonstration. En effet l'ensemble des composantes de $X \setminus A$ a une cardinalité inférieure ou égale à celle des extrémités de A, donc a fortiori inférieure ou égale à $2|A| < \aleph_0$. D'autre part toute composante de $\partial X - A$ est la dérivée d'une composante de $X \setminus A$, ce qui prouve la deuxième partie. □

1.20. Remarque. $\gamma_{\partial X}$ n'est par forcément injective. En effet soit X_0 et X_1 deux graphes disjoints tous deux isomorphes à $K_{1,\aleph_0}$, et soit X le graphe obtenu en joignant les deux sommets de degré infini de X_0 et de X_1 par une arête. Le graphe ∂X est alors formé par la réunion de deux graphes complets infinis n'ayant qu'un sommet commun. Il est alors clair que l'on a $|\mathcal{T}(\partial X)| = 2$ alors que $|\mathcal{E}(\partial X)| = 1$.

1.21. Théorème. *Si X est un graphe localement fini alors les applications γ_X et ρ_X sont des bijections.*

Démonstration. En raison de 1.17 il reste à montrer que γ_X est injective. Il suffit de prouver que, si R_0 et R_1 sont deux rayons quelconques de X, alors $R_0 \equiv_X R_1$ implique $R_0 \sim_X R_1$.

Supposons qu'il existe un ensemble fini S de sommets de X tel que

$$\mathcal{C}_{X-S}(R_0) \neq \mathcal{C}_{X-S}(R_1).$$

Notons A l'ensemble des arêtes de X incidentes à S. C'est un ensemble fini puisque X est localement fini. De plus, pour $i = 0, 1$, on a

$$\mathcal{C}_{X\setminus A}(R_i) \subseteq \mathcal{C}_{X\setminus S}(R_i).$$

Par suite on a

$$\mathcal{C}_{X\setminus A}(R_0) \neq \mathcal{C}_{X\setminus A}(R_1).$$

D'où le résultat. □

La condition du théorème n'est évidemment pas nécessaire, puisque par exemple tout graphe infini complet ainsi que son graphe dérivé ont une seule classe terminale et une seule classe traçable, et en conséquence, dans un tel cas les deux applications précédentes ne pourront pas être autrement que bijectives.

Ce théorème implique en particulier que *$\rho_X \circ \gamma_X$ est une bijection de $\mathcal{T}(X)$ sur $\mathcal{T}(\partial X)$*. En conséquence de ce résultat et du fait que si un graphe est localement fini alors il en est de même de son graphe dérivé, on montre aisément par récurrence que:

1.22. Corollaire. *Si un graphe X est localement fini alors, pour tout $n \geqslant 1$, l'application $\rho_{\partial^{n-1}X} \circ \gamma_{\partial^{n-1}X} \circ \cdots \circ \rho_{\partial^0 X} \circ \gamma_{\partial^0 X}$ est une bijection de $\mathcal{T}(X)$ sur $\mathcal{T}(\partial^n X)$.*

Plus généralement, en raison de 1.18, on obtient facilement par récurrence:

1.23. Corollaire. *Soit X un graphe quelconque. Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'application $\rho_{\partial^n X} \circ \gamma_{\partial^n X} \circ \cdots \circ \rho_{\partial^1 X} \circ \gamma_{\partial^1 X}$ est une surjection de $\mathcal{T}(\partial X)$ sur $\mathcal{T}(\partial^{n+1} X)$.*

2. Classes traçables (fortement) libres

2.1. Définition. Une classe traçable ε d'un graphe X sera dite (*fortement*) *libre* ssi il existe un ensemble fini d'arêtes A tel que $\mathscr{C}_{X\setminus A}(\varepsilon) \neq \mathscr{C}_{X\setminus A}(\varepsilon')$ pour toute classe traçable $\varepsilon' \neq \varepsilon$ (et si $\mathscr{C}_{X\setminus A}(\varepsilon)$ ne contient aucun des sommets de degré impair de X). Une classe traçable non libre est dite *liée.*

Les notions de liberté et de liberté forte coincident si le graphe n'a aucun sommet de degré impair. De plus il est clair que *si un graphe a un nombre fini de classes traçables* (*et de sommets de degré impair*), *alors chaque classe traçable est* (*fortement*) *libre.*

Le concept de liberté forte qui semble tout à artificiel a priori, se verra parfaitement justifié dans les sections suivantes.

2.2. Remarque. Si la notion de liberté pour les classes traçables est l'exacte réplique de la notion analogue pour les classes terminales, il n'y a pourtant aucune relation entre la liberté d'une classe terminale τ et celle de la classe traçable $\gamma_X\tau$ qui la contient. En effet considérons les deux exemples suivants.

(1) Soit $(R_n)_{n<\omega}$ une famille de rayons deux à deux disjoints. Posons $R_0 = (x_0, x_1, \ldots)$, et soit X le graphe tel que

$$V(X) = \bigcup_{n<\omega} V(R_n)$$

et

$$E(X) = \bigcup_{n<\omega} (E(R_n) \cup \{[x_n, y]: y \in V(R_0 \cup R_n)\}).$$

Alors $[R_0]_X$ est liée tandis que $[\![R_0]\!]_X$ est libre puisque c'est l'unique classe traçable de X.

(2) Soit $R = (x_0, x_1, \ldots)$ un rayon, et soit $(A_n)_{n<\omega}$ une famille d'ensembles infinis disjoints de $V(R)$, et deux à deux disjoints. Considérons le graphe X tel que

$$V(X) = V(R) \cup \bigcup_{n<\omega} A_n$$

et

$$E(X) = E(R) \cup \bigcup_{n<\omega} \{[x_k, y]: k \in \{2n, 2n+1\} \quad \text{et} \quad y \in A_n\}.$$

Alors $[\![R]\!]_X$ est liée tandis que $[R]_X$ est libre puisque c'est l'unique classe terminale de X.

2.3. Remarque. Comme précédemment on remarque tout aussi facilement que la notion de liberté n'est pas plus préservée par l'application ρ_X de $\mathscr{E}(X)$ dans $\mathscr{T}(\partial X)$.

(1) En effet si l'on reprend l'exemple 2.2(2) et si on définit Y comme le graphe tel que

$$V(Y) = V(R) \cup \bigcup_{n<\omega} A_n$$

et

$$E(Y) = E(R) \cup \bigcup_{n<\omega} \bigcup_{y\in A_n} [x_n, y],$$

alors $[\![R]\!]_Y$ est l'unique élément de $\mathscr{E}(Y)$ donc est libre, tandis qu'il est loin d'en être de même de $\rho_X [\![R]\!]_X$ en raison des classes terminales associées aux restrictiond de ∂Y à $\bigcup_{y\in A_n} [x_n, y]$ pour tout $n<\omega$.

(2) Par contre il est clair qu'une classe traçable ε d'un graphe X quelconque est libre si $\rho_X\varepsilon$ est libre.

3. Partitions partielles induites de $\mathscr{E}^+(X)$.

3.1. Par *partition partielle* d'un ensemble nous entendrons une partition d'une partie de cet ensemble. Nous aurons à considérer, comme partition particulière d'un ensemble A, l'ensemble des parties à un élément de A, que nous noterons $[A]$.

Etant donné un graphe X nous noterons $V_1(X)$ l'ensemble des sommets de degré impair de X, et nous poserons

$$\mathscr{E}^+(X) = \mathscr{E}(X) \cup V_1(X).$$

3.2. Définition. (i) Etant donné un ensemble fini A d'arêtes d'un graphe X, l'ensemble

$$\mathscr{P}_A = \{\{\alpha \in \mathscr{E}^+(A) : \mathscr{C}_{X\setminus A}(\alpha) = G\} : G \text{ composante de } X\setminus A\}$$

est une partition de $\mathscr{E}^+(X)$ que l'on dira *induite par A*.

(ii) Une partition partielle $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}^+(X)$ sera dite *induite par* un ensemble fini A d'arêtes de X ssi on a $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}_A$.

(iii) Plus généralement une partition partielle $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}^+(X)$ sera dite *induite* ssi elle est induite par un certain ensemble fini A d'arêtes de X.

3.3. Remarques. (1) *Si X est un graphe connexe alors toute partition partielle induite de $\mathscr{E}^+(X)$ est finie.*

C'est une conséquence triviale du Lemme 1.19. On en déduit alors immédiatement:

(2) *Si X est un graphe connexe alors $[\mathscr{E}^+(X)]$ est induite ssi $\mathscr{E}^+(X)$ est fini.*

(3) Une classe traçable ε est fortement libre ssi $\{\{\varepsilon\}\}$ est induit.

3.4. Nous utiliserons par la suite l'extension suivante d'un graphe.

Etant donné un graphe non vide X nous choisirons une fois pour toutes une famille $(R_x)_{x\in V_1(X)}$ de rayons deux à deux disjoints, tels que R_x n'ait que son origine x en commun avec X. Nous poserons alors

$$X^+ = X \cup \Big(\bigcup_{x\in V_1(X)} R_x \Big).$$

Le graphe X^+ n'a aucun sommet de degré impair, et l'application $\alpha \mapsto \alpha^+$ de $\mathscr{E}^+(X)$ dans $\mathscr{E}(X^+)$, où α^+ est soit l'unique classe traçable de X^+ contenant α si $\alpha \in \mathscr{E}(X)$, soit $[\![R_\alpha]\!]_X$ si $\alpha \in V_1(X)$, est bijective. De plus il est clair qu'*une partition partielle* $\mathscr{P}$ *de* $\mathscr{E}^+(X)$ *est induite par un ensemble A ssi la partition partielle* $\mathscr{P}^+ = \{P^+ : P \in \mathscr{P}\}$, *où* $P^+ = \{\alpha^+ : \alpha \in P\}$, *de* $\mathscr{E}(X^+)$ *est induite par* A. En particulier *une classe traçable* ε *est fortement libre ssi* ε^+ *est libre*, mais par contre dans le cas où $V_1(X)$ est infini, ε peut être libre sans que ε^+ le soit.

3.5. Lemme. *Si un graphe connexe infini n'a qu'un nombre fini de sommets de degré impair, alors il contient un sous-graphe* 1*-traçable.*

Démonstration. Soit X un tel graphe. C'est trivial si X a un rayon. Supposons qu'il n'en ait pas, alors il possède des sommets de degré infini, dont l'ensemble sera noté S. Toute composante de $X-S$ est finie et, en raison de l'hypothèse du lemme, l'ensemble Γ de ces composantes possédant des sommets ayant un degré impair dans X est aussi fini. Par suite, en conséquence de la connexité de X et du fait que tout sommet appartenant à S est de degré infini, le graphe $X - \bigcup \Gamma$ est un sous-graphe infini de X ne possédant aucun sommet de degré impair et aucune composante finie. Alors, en vertu de [4, Theorem 2], $X - \bigcup \Gamma$ a un recouvrement 2-traçable. D'où le résultat. □

3.6. Théorème. *Soit* $P \subseteq \mathscr{E}^+(X)$ *tel que* $\{P\}$ *soit induit, et soit* A_0 *et* A_1 *deux ensembles finis minimaux d'arêtes de* X *induisant* P. *On a alors* $|A_0| \equiv |A_1| \pmod 2$.

Démonstration. En raison de 3.4 il suffit de considérer le cas d'un graphe X sans sommet de degré impair.

Supposons $A_0 \neq A_1$. En raison de la minimalité de A_0 et de A_1, on a $A_i \nsubseteq A_{1-i}$ quel que soit $i \in \{0, 1\}$. Posons

$$Y_i = \mathscr{C}_{X \setminus A_i}(\alpha)$$

pour $i = 0, 1$ et un $\alpha \in P$ quelconque, et soit

$$Z = Y_0 \cup Y_1 - Y_0 \cap Y_1.$$

En raison de la finitude de $A_0 \cup A_1$ et puisque, pour tout sommet x de Z qui n'est pas incident à l'une des arêtes appartenant à $A_0 \cup A_1$, on a $d(x; Z) =$

$d(x; X)$ qui est pair ou infini, on en déduit que Z n'a qu'un nombre fini de sommets de degré impair. De plus Z ne peut pas avoir de sous-graphe 1-traçable, puisque pour tout sous-graphe 1-traçable G de Z il existerait, en raison de Z, un unique $i \in \{0, 1\}$ tel que $Y_i = \mathscr{C}_{X \setminus A_i}(\llbracket G \rrbracket_X)$, ce qui contredirait le fait que A_0 et A_1 induisent P. Par suite, en vertu de 3.5, toute composante de Z est finie. Or toute arête incidente à un sommet de Z et à un sommet de $Y_0 \cup Y_1$ est élément de $A_0 \cup A_1$, ce qui implique que Z n'a qu'un nombre fini de composantes, et par conséquent qu'il est lui-même fini.

D'autre part, en raison de la minimalité de A_0 et de A_1, l'ensemble

$$A = A_0 \cup A_1 - A_0 \cap A_1$$

est l'ensemble des arêtes de $X \setminus Z$ incidentes à $V(Z)$.

Donc, comme X n'a aucun sommet de degré impair, et puisque Z est fini et a par suite un nombre pair de sommets de degré impair, on a

$$|A| \equiv 0 \pmod 2,$$

ce qui implique bien que

$$|A_0| \equiv |A_1| \pmod 2. \qquad \square$$

Remarquons que si ce résultat devient généralement faux si l'on remplace "classe traçable" par "classe terminale", il reste par contre vrai dans le cas d'un graphe localement fini en conséquence de 1.21. Nous obtenons d'ailleurs ainsi comme cas particulier l'un des résultats de Zelinka [10, Lemma 5]. Tout comme dans cet article, mais d'une façon malgré tout beaucoup plus générale, nous poserons la définition suivante:

3.7. Définition. Un ensemble $P \subseteq \mathscr{E}^+(X)$ tel que $\{P\}$ soit induit sera dit *pair* (resp. *impair*) ssi il existe un ensemble fini minimal d'arêtes de X induisant $\{P\}$ de cardinalité paire (resp. impaire).

Si P est réduit à un seul élément α, on dira plus simplement que α est paire ou impaire suivant le cas. Il est évident que tout élément de $V_1(X)$ est impair.

Toute classe traçable fortement libre sera donc soit paire soit impaire. On notera $\mathscr{E}_0(X)$ et $\mathscr{E}_1(X)$ les ensembles des classes traçables respectivement paires et impaires de X, et on posera $h_i^X = |\mathscr{E}_i(X)|$ pour $i = 0, 1$ et $s^X = |V_1(X)|$, ou tout simplement h_i et s si aucune confusion n'est à craindre.

Plus généralement si $\mathscr{P}$ est une partition induite de $\mathscr{E}^+(X)$, on notera $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ les ensembles des éléments de $\mathscr{P}$ qui sont respectivement pairs et impairs. On a alors le résultat suivant:

3.8. Théorème. *Soit X un graphe connexe et $\mathscr{P}$ une partition induite de $\mathscr{E}^+(X)$. On a alors* $|\mathscr{P}_1| \equiv 0 \pmod 2$.

Démonstration. En raison de la définition de X^+ il est clair que, pour $i=0, 1$, on a $\mathcal{P}_i^+ = \{P^+ : P \in \mathcal{P}_i\}$, ce qui implique en particulier que $|\mathcal{P}_i| = |\mathcal{P}_i^+|$. Par suite nous pouvons supposer sans perte de généralité que X ne possède aucun sommet de degré impair.

Soit A un ensemble fini minimal d'arêtes de X induisant $\mathcal{P}$. Pour tout $P \in \mathcal{P}$ posons

$$Y_P = \mathscr{C}_{X\setminus A}(\alpha)$$

pour un $\alpha \in P$ quelconque, et notons A_P l'ensemble des arêtes appartenant à A incidentes à des sommets de Y_P.

En raison de la minimalité de A on a

$$A = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} A_P.$$

De plus à cause de cette méme minimalité, et du fait que les éléments de la famille $(Y_P)_{P \in \mathcal{P}}$ sont deux à deux disjoints, il s'en suit que pour tout $a \in A$ il existe exactement deux éléments différents P et P' de $\mathcal{P}$ tels que $a \in A_P \cap A_{P'}$.

Considérons maintenant le graphe G tel que l'on ait $V(G) = \mathcal{P}$ et $[P, P'] \in E(G)$ ssi $P \neq P'$ et $|A_P \cap A_{P'}| \equiv 1 \pmod 2$. D'après ce qui prédède on a

$$|E(G)| \equiv 2\,|A| \equiv 0 \pmod 2$$

et

$$d(P, G) \equiv |A_P| \pmod 2 \quad \text{pour tout } P \in \mathcal{P}.$$

Alors puisque $|V(G)| = |\mathcal{P}|$ est fini en raison de 3.3(1), le graphe G a un nombre pair de sommets de degré impair, ce qui prouve bien le résultat. □

3.9. Corollaire. *Soit X un graphe tel que $\mathscr{E}^+(X)$ soit fini. On a alors $h_1 \equiv s$* (mod 2)

Démonstration. En effet $[\mathscr{E}^+(X)]$ est induit et on a

$$[\mathscr{E}^+(X)] = [\mathscr{E}_1(X) \cup V_1(X)].$$

D'où le résultat d'après le théorème précédent. □

4. Recouvrements traçables

Nous allons maintenant utiliser les notions précédentes pour donner une nouvelle solution aux deux problèmes de Ore [6, p. 47, Problèmes 3 et 4].

4.1. Pour un graphe infini X nous considérons les propriétés suivantes:

P1. $E(X)$ est dénombrable;

P2. X est connexe;

P3. X a au plus un sommet de degré impair, et s'il n'en a pas alors il a au moins un sommet de degré infini;

P4. X n'a aucun sommet de degré impair;

P5. Si Y est un sous-graphe fini de X alors $X\setminus Y$ a exactement une composante infinie;

P6. Si Y est un sous-graphe fini de X alors $X\setminus Y$ a au plus deux composantes infinies;

P7. Si Y est un sous-graphe fini de X sans sommet de degré impair alors $X\setminus Y$ a exactement une composante infinie.

4.2. Rappelons les résultats de Erdös, Grüwald (Gallai) et Vázsonyi [2].

(1) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe infini soit* 1-*traçable est qu'il vérifie les conditions* P1, P2, P3 *et* P5.

(2) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe infini soit* 2-*traçable est qu'il vérifie les conditions* P1, P2, P4, P6 *et* P7.

4.3. Lemme. *Si un graphe infini n'a qu'un nombre fini de sommets de degré impair et possède exactement une classe traçable, alors il vérifie la propriété* P5.

Démonstration. Soit Y un sous-graphe fini de X. Comme X a une classe traçable, $X\setminus Y$ possède au moins une composante infinie. Soit Z l'une d'elles. Comme $E(Y)$ et $V_1(X)$ sont finis alors il en est de même de $V_1(Z)$. Par suite, en raison de 3.5, Z a un sous-graphe 1-traçable. Donc, en vertu de l'unicité de la classe traçable, cette composante infinie de $X\setminus Y$ est unique. D'où le résultat. □

4.4. Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe infini soit* 1-*traçable est qu'il vérifie les conditions* P1, P2 *et* P3, *et qu'il possède exactement une classe traçable.*

Démonstration. Soit X un graphe infini vérifiant P1, P2 et P3.

Si X est 1-traçable alors il possède une classe traçable qui est unique en raison de 1.11(iii).

Réciproquement si X n'a qu'une classe traçable, alors il vérifie P5 en raison de 4.3, et par suite il est 1-traçable en raison de 4.2(1). □

4.5. Proposition. *Si un graphe infini vérifie les conditions* P1, P2 *et* P4, *et possède exactement une classe traçable alors il est* 2-*traçable.*

C'est une conséquence immédiate de 4.3 et de 4.2(2). La réciproque est évidemment fausse comme le montre le simple cas d'un circuit infini.

4.6. Lemme. *Si un graphe X sans sommet de degré impair a un recouvrement* 2-*traçable de cardinalité fini k, alors $\mathscr{E}(X)$ est fini et on a*

$$h_0+\tfrac{1}{2}h_1\leq k.$$

Démonstration. Il existe une famille $(C_n)_{1\leq n\leq k}$ de circuits infinis deux à deux disjoints et un épimorphisme fort $\varphi : \bigcup_{1\leq n\leq k} C_n \to X$. Chaque circui infini C_n, pour $1\leq n\leq k$, est la réunion de deux rayons R_n^0 et R_n^1.

La première partie du lemme est triviale puisque, étant donné que φ est un épimorphisme fort et que toute classe traçable de X peut être séparée par un ensemble fini d'arêtes de tout ensemble fini de classes traçables de X auquel elle n'appartient pas, on a forcément

$$\mathscr{E}(X) = \{[\![\varphi R_n^i]\!]_X : 1\leq n\leq k \quad \text{et} \quad i = 0, 1\}$$

qui est un ensemble fini.

Chaque classe traçable de X est donc libre. Alors pour tout $\varepsilon \in \mathscr{E}(X)$, pour tout ensemble fini minimal A d'arêtes de X isolant ε, et pour $1\leq n\leq k$ on a $|E(\varphi C_n)\cap A| \equiv 1 \pmod 2$ ssi il existe un unique $i\in\{0, 1\}$ tel que $\varphi R_n^i \in \varepsilon$.

Par suite si, pour $\varepsilon\in\mathscr{E}(X)$, on note p_ε le nombre de rayons R_n^i, avec $1\leq n\leq k$ et $i = 0, 1$, tels que $\varphi R_n^i \leq \varepsilon$, alors p_ε est un nombre non nul qui est pair ssi ε est pair. Par conséquent, en posant $p_\varepsilon = 2m_\varepsilon$ lorsque ε est pair, on obtient:

$$\begin{aligned} 2k &= \sum_{\varepsilon\in\mathscr{E}_0(X)} 2m_\varepsilon + \sum_{\varepsilon\in\mathscr{E}_1(X)} p_\varepsilon \\ &\geq 2\,|\mathscr{E}_0(X)| + |\mathscr{E}_1(X)| = 2h_0 + h_1, \end{aligned}$$

soit $k \geq h_0 + \frac{1}{2}h_1$. □

4.7. Lemme. *Soit X un graphe connexe, et soit $\mathscr{P}$ une partition partielle de $\mathscr{E}^+(X)$ de cardinalité paire induite par un ensemble fini minimal A d'arêtes de X. Alors il existe une involution sans point fixe f de $\mathscr{P}$ (i.e. $fP \neq P = f^2P$ pout tout $P\in\mathscr{P}$), et une famille $(W_P)_{P\in\mathscr{P}}$ de chaînes de X deux à deux arête-disjointes telle que l'on ait:*

(i) $W_P = W_{fP}$;

(ii) W_P *est une $(V(Y_P), V(Y_{fP}))$-chaîne où, pour tout $P\in\mathscr{P}$ on a $Y_P = \mathscr{C}_{X\setminus A}(\alpha)$ pour un $\alpha\in P$ quelconque.*

Démonstration. Pour tout $P\in\mathscr{P}$ considérons un sommet quelconque a_P de Y_P, et associons lui un nouveau sommet $b_P\notin V(X)$ de manière à avoir $b_P\neq b_{P'}$, si $P\neq P'$. Notons X' le graphe obtenu en joignant a_P à b_P pour chaque $P\in\mathscr{P}$, et soit T un arbre maximal de X'. Notons T^B le sous-arbre de T engendré par $B = \{b_P : P\in\mathscr{P}\}$, i.e. le plus petit sous-arbre de T contenant B; et pour $x, y\in V(T^B)$ notons T^B_{xy} l'unique xy-chaîne de T^B.

Puisque $|B| = |\mathscr{P}|$ est pair, et en vertu du Lemme 4.5 de [9], il existe une involution sans point fixe g de B telle que les éléments de la famille $(T^B_{b_P, gb_P})_{P\in\mathscr{P}}$ soient deux à deux arête-disjoints.

Il ne nous reste alors plus qu'à définir la permutation f de $\mathscr{P}$ de façon que $b_{fP} = gb_P$, et la famille $(W_P)_{P\in\mathscr{P}}$ de manière que W_P soit la plus petite chaîne de $T^B_{b_P, gb_P}$ joignant $V(Y_P)$ à $V(Y_{fP})$. □

4.8. Lemme. *Soit X un graphe vérifiant les conditions* P1, P2 *et* P4, *et tel que $\mathscr{E}(X)$ soit fini. Alors X a un recouvrement 2-traçable de cardinalité*

$$k = h_0 + \tfrac{1}{2}h_1.$$

Démonstration. Comme $\mathscr{E}(X)$ est fini et comme X n'a aucun sommet de degré impair, toute classe traçable est fortement libre, donc est paire ou impaire. Soit A un ensemble fini minimal d'arêtes de X induisant $[\mathscr{E}(X)]$.

La relation $\leqslant$ telle que l'on ait "$G \leqslant G'$ ssi $G \subseteq G'$ et $E(G' \setminus G) \cap A \neq \emptyset$" est un ordre sur l'ensemble des sous-graphes de X, et il est clair que l'ensemble des sous-graphes finis de X sans sommet de degré impair, ordonné par cette relation, est inductif donc possède des éléments maximaux. Soit G l'un d'eux, et soit $X' = X \setminus G$. Puisque G est fini et n'a que des sommets de degré pair, on a

$$\mathscr{E}_i(X') = \{\varepsilon' : \varepsilon \in \mathscr{E}_i(X)\} \quad \text{pour } i = 0, 1,$$

où, pour $\varepsilon \in \mathscr{E}(X)$, $\varepsilon' = \{Y \in \varepsilon : Y \subseteq X'\}$ est la classe traçable correspondante de X'.

D'après P4 et 3.9 toute composante de X a un nombre fini pair de classes traçables impaires, donc en raison de 4.7, il existe une involution sans point fixe f de $\mathscr{E}_1(X)$ et une famille $(W_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathscr{E}_1(X)}$ de chaînes de X' deux à deux arête-disjointes telles que l'on ait:

- $W_\varepsilon = W_{f\varepsilon}$,
- W_ε est une $(V(\mathscr{C}_{X' \setminus A}(\varepsilon')), V(\mathscr{C}_{X' \setminus A}((f\varepsilon)')))$-chaîne.

En vertu de la maximalité de G tout élément de $A \cap E(X')$ n'appartient à aucun cycle de X'; cela implique que l'on a forcément

$$A \cap E(X') \subseteq E\Big(\bigcup_{\varepsilon \in \mathscr{E}_1(X)} W_\varepsilon\Big).$$

Par suite, quel que soit $\varepsilon \in \mathscr{E}_1(X)$, le graphe

$$Z_\varepsilon = \mathscr{C}_{X' \setminus A}(\varepsilon') \cup W_\varepsilon \cup \mathscr{C}_{X' \setminus A}((f\varepsilon)')$$

est un graphe infini vérifiant les conditions P1, P2, P4, P6 et P7, et qui est donc 2-traçable en raison de 4.2(2).

Posons

$$Y = X' \setminus \bigcup_{\varepsilon \in \mathscr{E}_1(X)} Z_\varepsilon.$$

On a

$$\mathscr{E}(Y) = \mathscr{E}_0(Y) = \{\varepsilon_Y : \varepsilon \in \mathscr{E}_0(X)\},$$

où $\varepsilon_Y = \{G \in \varepsilon : G \subseteq Y\}$ pour $\varepsilon \in \mathscr{E}(X)$.

Pout tout $\varepsilon \in \mathscr{E}_0(X)$ notons Z_ε la composante de Y contenant un représentant de ε. Il est clair que Z_ε vérifie les conditions P1, P2 et P4, et qu'elle est donc 2-traçable en vertu de 4.5.

La famille $(Z_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathscr{E}(X)}$ est alors une famille de k sous-graphes 2-traçables de X deux à deux arête-disjoints, tels que toute composante de $X \setminus \bigcup_{\varepsilon \in \mathscr{E}(X)} Z_\varepsilon$ soit un graphe fini sans sommet de degré impair. On pourra donc aisément compléter les graphes Z_ε pour obtenir le recouvrement cherché. □

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre les deux problèmes de Ore.

4.9. Théorème. *Soit k un cardinal dénombrable. Le plus petit recouvrement 2-traçable d'un graphe infini connexe X est de cardinalité égale à k ssi X vérifie les conditions* P1 *et* P4 *et l'une des deux conditions suivantes selon le cas:*

P8(1) $(k<\aleph_0)$. *$\mathscr{E}(X)$ est fini et $h_0+\frac{1}{2}h_1=k$;*

P8(2) $(k=\aleph_0)$. *$\mathscr{E}(X)$ est infini.*

Démonstration. Les conditions sont nécessaires en raison de 4.6 et de 4.8. Pour ces mêmes raisons elles sont suffisantes lorsque k est fini. Si $k=\aleph_0$ alors, puisque X vérifie P4 il a un recouvrement 2-traçable d'après le Théorème 2 de Nash-Williams [4], qui est donc de cardinalité dénombrable en raison de P1, et par suite égale à $\aleph_0$ en vertu de P8(2) et de 4.6. □

4.10. Remarques. (1) Si X est localement fini alors, en raison de 1.21, nous retrouvons le théorème de Zelinka [10].

(2) Si $k=\aleph_0$ alors $\mathscr{E}(X)$ est infini mais n'est pas nécessairement dénombrable. Il suffit en effet de considérer l'arbre 4-régulier T. Il vérifie bien les conditions P1, P4 et P8(2), avec

$$|\mathscr{E}(T)|=|\mathscr{T}(T)|=2^{\aleph_0},$$

puisque T est localement fini et contient l'arbre diadique qui a $2^{\aleph_0}$ classes terminales.

4.11. Théorème. *Soit k et s deux cardinaux dénombrables. Le plus petit recouvrement traçable d'un graphe infini connexe X avec $|V_1(X)|=s$ est de cardinalité égale à k ssi X vérifie la condition* P1 *et l'une des deux conditions suivantes selon les cas:*

P9(1) $(k<\aleph_0)$. *$\mathscr{E}^+(X)$ est fini et $h_0+\frac{1}{2}(h_1+s)=k$;*

P9(2) $(k=\aleph_0)$. *$\mathscr{E}^+(X)$ est infini.*

Démonstration. Considérons le graphe X^+ tel que défini en 3.4. Tout recouvrement 2-traçable $\mathscr{A}$ de X^+ induit un recouvrement traçable $\mathscr{A}_X=\{G\cap X\colon G\in\mathscr{A}^+\}$ de X, et on a évidemment $|\mathscr{A}_X|=|\mathscr{A}|$.

Inversement à tout recouvrement traçable $\mathscr{A}$ de X qui est minimal, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun recouvrement traçable de X moins fin que $\mathscr{A}$, correspond un unique recouvrement 2-traçable $\mathscr{A}^+$ de X^+ tel que $\mathscr{A}^+_X=\mathscr{A}$. En effet si G est un graphe i-traçable, pour $i=0,1,2$, appartenant à $\mathscr{A}$, alors toute extrémité de G est un sommet de degré impair de X, ceci en raison de la minimalité de $\mathscr{A}$. On pose alors

$$G^+=G\cup\bigcup\{R_x\colon x \text{ extrémité de } G\}$$

pour tout $G \in \mathscr{A}$. Il est alors clair que $\mathscr{A}^+ = (G^+)_{G \in \mathscr{A}}$ est le recouvrement cherché.

Par suite le plus petit recouvrement traçable de X et le plus petit recouvrement 2-traçable de X^+ ont même cardinalité. Le résultat est alors une conséquence de 4.9 et de 3.4. □

Remerciements

L'auteur tient à remercier le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie Canada (subvention A-7315) pour son aide financière pendant la préparation de cet article.

Bibliographie

[1] C. Berge, Graphes et hypergraphes (Dunod, Paris, 1970).
[2] P. Erdös, T. Grünwald and R. Vázsonyi, Über Euler-Linien unendlicher Graphen, J. Math. Phys. 17 (1938) 59–75.
[3] R. Halin, Über unendliche Wege in Graphen, Math. Ann. 157 (1964) 125–137.
[4] C.St.J.A. Nash-Williams, Decomposition of graphs into closed and endless chains, Proc. London Math. Soc. 10 (1960) 221–238.
[5] C.St.J.A. Nash-Williams, Decomposition of graphs into two-way infinite paths, Canad. J. Math. 15 (1963) 479–485.
[6] O. Ore, Theory of Graphs, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38 (AMS, Providence, RI, 1962).
[7] N. Polat, Aspects topologiques de la séparation dans les graphes infinis. I, Math. Z. 165 (1979) 73–100.
[8] B. Rothschild, The decomposition of graphs into a finite number of paths, Canad. J. Math. 17 (1965) 468–479.
[9] G. Sabidussi, Infinite Euler graphs, Canad. J. Math. 16 (1964) 821–838.
[10] B. Zelinka, Two-way infinite trails in locally finite graphs, in: Recent Advances in Graph Theory (Academia Prague, 1975) 533–535.
[11] B. Zelinka, Zweiseitig unendliche Züge in lokalendlichen Graphe, Čas. pěst. mat. 99 (1974) 386–393.